Rappel et Compléments sur la loi de Probabilité

I - Fonction de Probabilité :

I-1- Experience aléatoire, Algèbre d'evenement :

On appelle experience aléatoire, une experience dont l'issue n'est pas certaine mais dépend du hasard par exemple si on lance deux dés, on peut obtenir l'un des deux experience suivant $(1,1),(1,2)\ldots(6,6)$
On appelle ensemble fondamental et on note Ω l'ensemble des resultats possible

• Algèbre d'évenement :

Un evenement est une assertion relative au ~~relatif~~ résultat d'expérience et qui peut ou être réalisée à l'issue de celle-ci, dans l'expérience citée
A = "la somme des pts amenée est superieur à 10"
A est réalisé s'il obtient l'un des résultat suivant: (5,6), (6,5), (6,6) et on note $A = \{(5,6),(6,5),(6,6)\}$. Ainsi, on peut interpreter un évenement comme étant une partie de Ω.
Si Ω est fini toute les parties de Ω sont des évenements. Sinon, étant donnée deux évenement A et B donc :
- $\bar{A}$ est l'contraire de A ou bien complémentaire de A dans Ω, est un évenement
- "A et B" noté $A \cap B$, de même que "A ou B" noté $A \cup B$ sont des évenements

Ω est appelé évenement certain et ϕ son complémentaire est évenement impossible
on appelle Algèbre d'évenement toute Partie $\mathcal{A}$ de $P(\Omega)$ vérifiant :

1) $\Omega \in \mathcal{A}$
2) si $A \in \mathcal{A}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{A}$
3) si $(A_i)_{i\in I}$ (où $I \subset \mathbb{N}$, I fini) est une famille d'évenements alors $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$

• Si 2 évenements A et B vérifiant $A \cap B = \phi$, on dira qu'il sont incompatible
• Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'évenements, deux à deux incompatible et telque $\bigcup_{i\in A} = \Omega$ on dire que $(A_i)_{i\in I}$ forme un Système complet d'evenement :

- I - 2 - Fonction de Probabilité :

A chaque évenement A on associe un nombre noté $P(A)$ compris entre 0 et 1.

Définition : axiomatique (de Kolmogorov)

on appelle probabilité, la fonction P définie sur $\mathcal{A}$ et à valeur dans $[0,1]$ vérifiant : 1) $P(\Omega) = 1$

2) Pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'évenements deux à deux incompatibles on a : $P(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i)$

Propriété de la fonction P :

1) $P(\emptyset) = 0$
2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
3) si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$
4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille qcq d'évenement on a : $P(\bigcup_{i\in I} A_i) \leq \sum_{i\in I} P(A_i)$
6) Si $(B_i)_{i\in I}$ forme un système complet d'évenement on a :

$$P(A) = \sum_{i\in I} P(A \cap B_i)$$

- I - 3 - Probabilité Conditionelle :

La réalisation d'un évenement peut modifie la probabilité de réalisation d'un évenement A.

Dans l'exemple précédent, on sait que l'evenement B : "les 2 dés amènent le même nbre des pts est réalisés la probabilités de l'évenements A = " la somme de Probabilité apoint est > 10" est : $P(A/B) = \frac{1}{6}$ sinon on a : $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Définition :

Si B est un évenement vérifiant $P(B) \neq P(A)$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B et on note $P(A/B)$ le nombre $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

on peut montrer que $P(\cdot/\cdot)$ est une fct de Probabilité C-à-d qui satisfaits les axiomes de Kolmogorov.

-I-4- Evenement independants:

① Définition:

A est independant de B ssi ona $P(A/B) = P(A)$

on peut voir sans difficulté que si A est independant de B, B est indépendant de A

Autrement dit, A et B sont independant si la relation suivante caracterise l'independance entre A et B. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

-II- Variable aléatoires discrétes:

-II-1- Généralités:

Définition:

Le concepte de v.a. formalise la notion de grandeur dependant du hasard

Exemple

Conciderons les lancés de 2 dés A cette experiences on a associé l'ensemble fondamental $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$ et pour tous resultat possible ω ona $P(\omega) = \frac{1}{36}$

Si maintenant on s'interesse à la somme de pts amené on définit ainsi S de Ω donc une partie de E de $\mathbb{N}$; soit $E = \{2,3,\dots,12\}$

Pour obtenir la probabilité d'une valeur qcq de E il suffit de denombrer le ω qui réalise cette valeur.

$$P(S=5) = P(\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}) = \frac{4}{36}$$

Plus generalement pour tout s de E ona:

$$P(S=s) = P(\{\omega / S(\omega) = s\})$$

Ainsi de la loi de Probabité P sur Ω on déduit une loi de Probabilité notée P_S sur E

Définition:

On appelle Variable aléatoire toute application X de Ω dans l'ensemble numérique E, i.e $X: \Omega \longrightarrow X(\omega) = x \in E$

N.B: On désigne par une majuscule X l'application et par la petite minuscule x toute valeur prise par X

On appelle la loi de Probabilité de X et on note P_X, la fct de Probabilité définit sur E par : $P_X(I) = P(\{w / X(w) \in I\})$ où $I \subset E$ noté $P(x \in I)$

• Par la suite on notera P au lieu de P_X : la loi de la variable X.

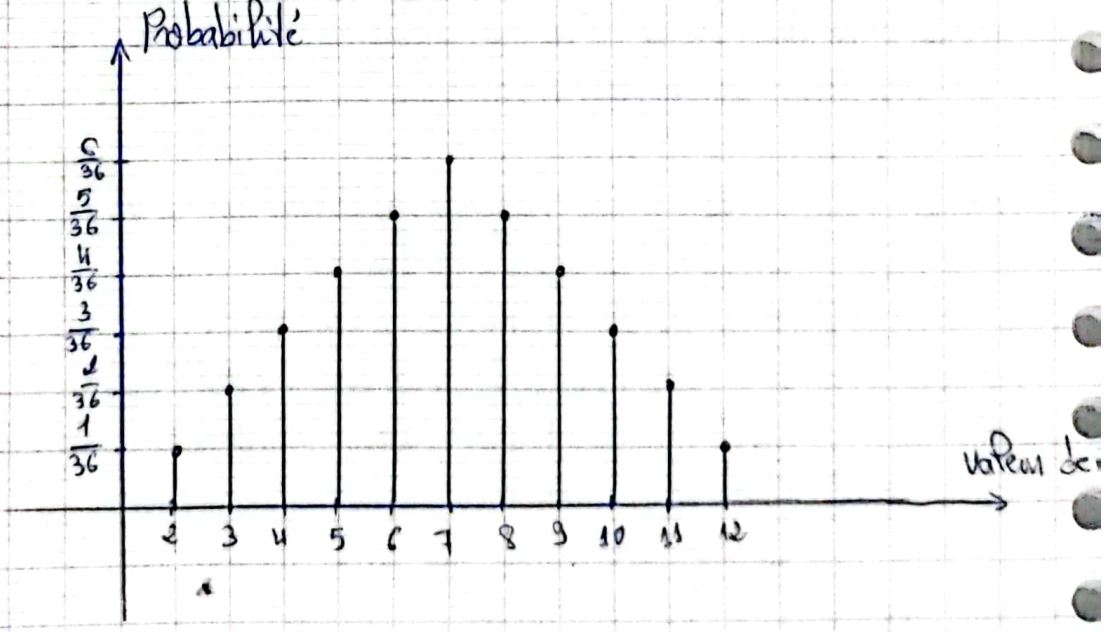
X est une V.a. discrète si $E = X(\Omega)$ est fini ou dénombrable on posera alors $p_i = P(X = x_i)$, pour tout $x_i \in E$.

Une loi discrète est alors définit par le tableau $(x_i, p_i)_{i \in I}$ avec $p_i \geq 0$, $\sum_{i \in I} p_i = 1$

(où $I \subseteq \mathbb{N}$, I fini ou dénombrable).

Par exemple la loi de S ; S = Somme des Pts amenés lors de l'envoi de 2 dés

Valeurs de S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	T
Prob $P(\ )$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1



Fonction de répartition:

① Définition:

On appelle fonction de répartition de la variable X la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par: $F(x) = P(X \leqslant x)$, $x \in \mathbb{R}$

Propriétés:

(1) F est à valeurs dans $[0,1]$

(2) $F(-\infty) = 0$ et $F(+\infty) = 1$

(3) F est une fct ↗

(4) F est continue P.P (presque partout) c-à-d sauf eventuellement en un nombre fini de points.

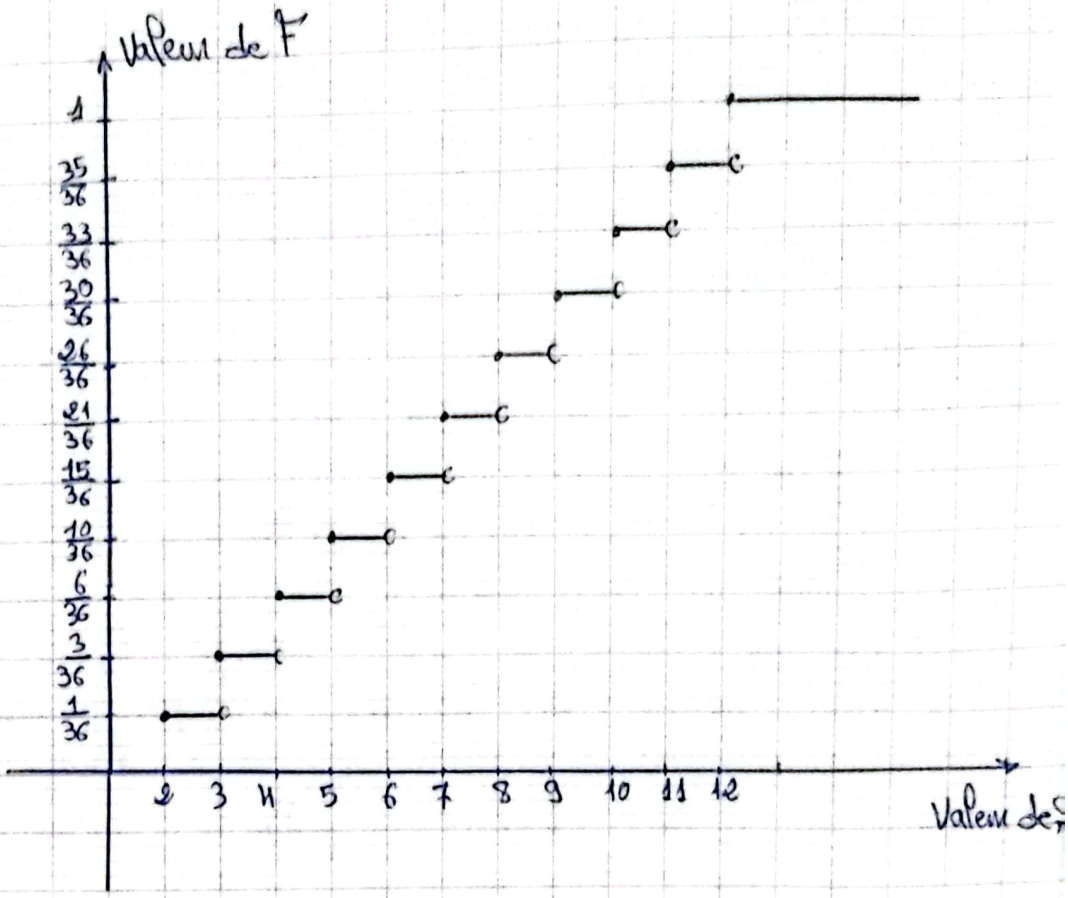
① Dans le cas où X est une v.a de loi discret $(x_i, P_i)_{i \in I}$, F est une fct en escalier (constant par morceaux et ne prend autant qu'un nombre fini ou dénombrable de valeur distinct) F est alors caractérisé par le valeur $F_i = F(x_i) = \sum_{k=1}^{i} P_k$

on a évidemment pour tout x tel que $x_i \leqslant x < x_{i+1}$; $F(x) = F(x_i) = F_i$

Exemple:

La fct de répartition de la V.a.S égale somme des Pts amené lors de lancé de 2 dés est donné par:

valeur de S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
valeurs de F	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	1



Remarque :

(1) On peut définir une loi discrète indifféremment par le table $(x_i, p_i)_{i \in I}$ ou par le tableau $(x_i, F_i)_{i \in I}$ où F_i désigne la f°t de répartition au point x_i $(i \in I)$

(2) Généralement les tables statistique donne les valeurs $(x_i, F_i)_{i \in I}$

(3) On peut calculer la probabilité d'un intervalle et

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \sum_{a < x_i \leq b}$$

Variable indépendante :

Soient X et Y deux V.a, X et Y sont indépendant ssi tout évenement lié à X est indépendant de tout évenement lié à Y.

Si X et Y sont des V.a discrètes de loi $(x_i, p_i)_{i \in I}$, respectivement $(y_j, q_j)_{j \in J}$, alors X et Y sont indépendantes ssi

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) \text{ pour tout } (i,j) \in I \times J$$

II - 2 - Moments d'une V.a discrète :

• Espérance Mathématique :

Soit X une V.a discrète de loi $(x_i, p_i)_{i\in I}$. On appelle espérance mathématique et on note $E(X)$, le nombre $E(X) = \sum_{i\in I} x_i p_i$

• Propriétés :

Soient X et Y, 2 V.a discrètes et a un nombre réel, on a :

- $E(a) = a$
- $E(aX) = a\,E(X)$
- $E(X+a) = E(X) + a$
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

• Variance :

On appelle Variance de X et on note $V(X)$, le nombre $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$

on peut montrer que (Formule de Huygheus)

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Si X a pour loi $(x_i, p_i)_{i\in I}$ on a : $V(X) = \sum_{i\in I} (x_i - E(X))^2 p_i$

En utilisant la formule de Huygheus : $V(X) = \sum_{i\in I} x_i^2 p_i - \left[E(X)\right]^2$

• Propriété de la variance :

Si X et Y sont deux V.a discrète et a, b deux nombre réel, on a :

- $V(aX) = a^2 V(X)$
- $V(X+a) = V(X)$
- $V(aX+bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\,cov(X,Y)$
- $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)$ où $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Si X et Y sont indépendantes on a $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

• Ecart type :

On appelle écart type de X, le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II - 3 - Lois Discrètes usuelles :

Ci-dessous pour chaque loi on donne l'ensemble des valeurs possibles, noté $X(\Omega)$ et les probabilités correspondantes, ainsi que les valeurs de l'éperance et de la variance.

• Loi Uniforme sur $\{1, \dots, n\}$

$X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$, $P(X=k) = \frac{1}{n}$; $1 \leq k \leq n$ et $E(X) = \frac{n+1}{2}$

$V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

• Loi de Bernoulli de Paramètre p : $0 < p < 1$

valeurs de X	0	1
Probabilités	$1-p$	p

et $E(X) = p$ $\quad V(X) = p(1-p)$

• Loi Binomiale $B(n,p)$:

$X(\Omega) = \{0, 1, \dots n\}$, $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ $0 < k \leq n$ (avec $q = 1-p$)

et $E(X) = np$, $V(X) = npq$

• Remarque :

Si X est une variable de loi Binomiale $B(n,p)$, alors on peut écrire $X = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ où les Z_i sont des v.a indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p.

• Loi de Poisson $P(\lambda)$:

$X(\Omega) = \mathbb{N}$, $P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $(k \in \mathbb{N})$

$E(X) = V(X) = \lambda$

• Loi géométrique $g(p)$:

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = pq^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}^*$ (avec $q = 1-p$)

et $E(X) = \frac{1}{p}$ $\quad V(X) = \frac{q}{p^2}$

Loi	Valeurs	Probabilité	Espérance	Variance	
Uniforme discrète $\mathcal{U}\{1,\dots,n\}$	$\{1,\dots,n\}$	$P(X=k)=\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	
Bernoulli de paramètre p.	$\{0,1\}$	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=q$	p	pq	$p\in[0,1]$, $q=p-1$
Binomial $B(n;p)$	$\{0,1,\dots,n\}$	$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $q=1-p$	np	npq	
géométrique $g(p)$	$\mathbb{N}^*$	$P(X=k)=pq^{k-1}$ où $q=1-p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	
Poisson $P(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	

III - Lois Continue :

III-1 Définitions :

Soit X une application de Ω dans $I \subseteq \mathbb{R}$; X est une variable aléatoire continue ssi $X(\Omega)=I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
La loi de X est alors définie par sa fonction de répartition F définie par :

$$F(X)=P(X<x),\ x\in\mathbb{R}$$ où F vérifie :

(1) F est une application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0,1]$
(2) $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$, on note $F(-\infty)=0$ $\lim_{x\to+\infty} F(x)=1$ on note $F(+\infty)=$
(3) F est ↗
(4) F est continue
(5) F est dérivable p.p (presque partout)

Dans ce chapitre la plus part des lois utiles sont absolument continues C'-à-dire que la fonction de répartition F admet une dérivée $f=F'$
f est appelé densité de Probabilité de X Alors F est la primitive de f s'annulant en $(-\infty)$ et on note $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

• Remarque :
Des propriétés de F il résulte que $f \geq 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 1$, on note $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$, on a alors la définition suivante :

On appelle densité de Probabilité, la fonction caractérisé par :

(1) $f(x) \geq 0$, $(x \in \mathbb{R})$
(2) f est continue p.p
(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

• Remarque :
Pour une variable continue les probabilités ponctuelles sont nulles, i.e pour tout $x \in X(\Omega)$, on a : $P(X = x) = 0$

• Probabilité d'un intervalle :

Propriété : $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(u)\,du$

on remarque que : $P(a < x \leq b) = P(a \leq x \leq b)$
$= P(a \leq x < b)$
$= P(a < x < b)$, et on peut

énoncer la propriété suivante :

• Propriété :
La loi d'une v.a continue indifféremment définie par sa densité f ou par sa fonction de répartition F.
En effet, on a $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$ ou ce qui équivalent

III.2 Moment d'une v.a continue :

Soit X une v.a continue dont la loi est définie par sa densité
L'espérance mathématique de X est le nombre :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

La variance de X est le nombre: $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - (E($

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - [E(X)]^2$$

• Remarque:
Par définition V(X) est toujours un nombre ≥ 0

• Propriétés:
Les propriétés de l'espérance et de la variance sont les mêmes que celles énoncées pour l'espérance et la variance des variables discrètes

Soit $k \in \mathbb{N}$, on appelle:

• moment centré d'ordre k: le nombre $\mu_k = E[(X - E(X))^k]$
on a $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = V(X)$

• moment non centré d'ordre k: le nombre $m_k = E(X^k)$
on a $m_1 = E(X)$, $m_2 = \mu_2 + m_1^2$

III. 3. Variable aléatoire fonction d'une variable aléatoire continue: Loi espérance

Soit Y la variable définie par $Y = \varphi(X)$ où X est une v.a continue dont la loi est définie par sa fonction de répartition F et φ une fonction dérivable. On cherche à calculer G la fct de répartition et g la densité de Y.

* Si φ est monotone ↗
alors φ est inversible et son inverse est monotone ↗; on a alors

$$G(y) = P(Y < y) = P(X < \varphi^{-1}(y)) = F[\varphi^{-1}(y)],\ y \in \mathbb{R}$$

et en dérivant on obtient la densité g de la variable Y

Exemple: Si $Y = e^X$

• $\varphi(x) = e^x$ est monotone est ↗ $\quad \varphi^{-1}(y) = \ln(y)$

• $G(y) = P(Y < y) = P(X < \varphi^{-1}(y))$

$$= P(X < \ln(y)) = F(\ln(y))$$

$$g = G'(y) = F'(\ln(y)) = \frac{1}{y} f(\ln(y))$$

* Si φ est ↘

alors φ est inversible et son inverse φ^{-1} est ↘, on a alors:

$$G(y) = P(Y<y) = P(X > \varphi^{-1}(y)) = 1 - F[\varphi^{-1}(y)]$$

• Espérance mathématique d'une fonction de v.a:

Soit $Y = \varphi(X)$ où X est une v.a continue de densité f, on a:

$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, g(y)\,dy$, où g est la densité de Y mais on a également:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\,dx$$ où f est la densité de X.

N.B Ce résultat permet de calculer $E(Y)$ sans connaître sa loi, c-à-dire sans calculer la densité g de la v.a Y.

III-4- Indépendance de 2 variables continues:

Soient X et Y deux v.a continues, alors le couple (X,Y) est une application de Ω dans $\mathbb{R}^2$.

Les variables X et Y sont indépendantes ssi la loi de couple (X,Y) est le produit des lois X et de Y, i.e. ssi la loi du couple (X,Y) admet pour fonction de répartition:

$$H(x,y) = P(X<x, Y<y) = F(x)\,G(y) \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Si X et Y ont pour densité respectivement f et g alors la densité du couple (X,Y) est:

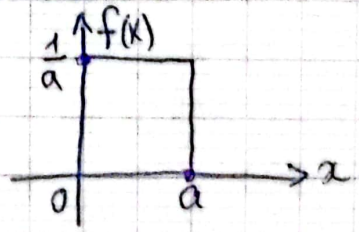
$$h(x,y) = f(x)\,g(y), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

III-5- Lois continues usuelles:

Pour chaque loi, on donne la densité de probabilité, éventuellement son graphe, l'espérance mathématique et la variance.

• Loi uniforme sur $[0,a]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } x\in[0,a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

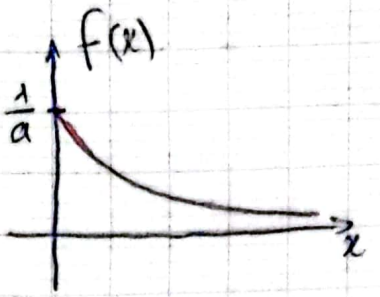


on a $E(X) = \frac{a}{2}$, $V(X) = \frac{a^2}{12}$

- Loi exponentielle $\mathcal{E}(x)$, $a>0$:

$$f(x) = \begin{cases} a e^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

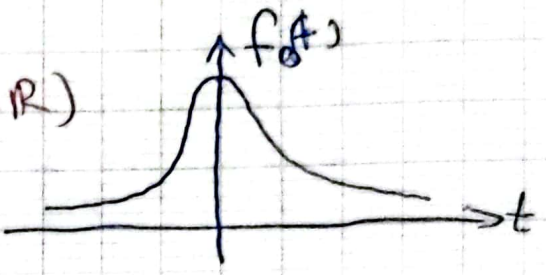
$$E(x) = \frac{1}{a} \; ; \; V(x) = \frac{1}{a^2}$$



- Loi Normale $N(0,1)$:

$$f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad (t \in \mathbb{R})$$

on a $E(T) = 0$ et $V(T) = 1$



Remarque :

La densité f_0 étant symétrique par rapport à la droite $(t=0)$ on a :

(1) $F_0(0) = 0{,}5$

(2) $F_0(-t) = 1 - F_0(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$

(3) $P(|T| < t) = P(T < t) - P(T < -t) = 2F_0(t) - 1$, $(t \in \mathbb{R})$

(4) $P(|T| > t) = P(T < -t) = 2(1 - F_0(t))$, $(t \in \mathbb{R})$

(5)

- Valeurs remarquables :
  - $P(-1{,}64 < T < 1{,}64) = 0{,}90$
  - $P(-1{,}96 < T < 1{,}96) = 0{,}95$
  - $P(-3{,}05 < T < 3{,}05) = 0{,}998$

Lois normales $N(m, \sigma)$ $(\sigma > 0)$

On a les définitions équivalentes suivantes

(1) X suit une loi $N(m,\sigma)$ ssi $X = \sigma T + m$ où T suit une loi $N(0,1)$

(2) X suit un loi $N(m,\sigma)$ ssi la v.a. $T = \frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi $N(0,1)$

(3) X admet pour densité la fct $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$, $(x \in \mathbb{R})$

on a : $E(X) = m$; et $V(X) = \sigma^2$

. Remarque :

Seule la loi $N(0,1)$ est tabulée ainsi tout calcul de probabilité relatif à X de loi $N(m, \sigma)$ nécessite de centrer et réduire la variable X c'-à-dire de se ramener à la variable $T = \frac{X-m}{\sigma}$ de la loi $N(0,1)$.

. Propriétés des lois normales :

Soient X_1 et X_2 deux V.a. indépendantes de lois normales respectivement $N(m_1, \sigma_1)$ et $N(m_2, \sigma_2)$ et a et b deux nombres réels, alors

- aX_1 suit une loi normale $N(am_1, |a|\sigma_1)$
- $X_1 + a$ suit une loi normale $N(m_1 + a, \sigma_1)$
- $X_1 + X_2$ suit une loi normale $N(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$

. En résumé :

$aX_1 + bX_2$ suit une loi normale $N(am_1 + bm_2, \sqrt{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2})$

Toute transformé linéaire de V.a. normale est normale et toute combinaison linéaire de V.a. normale indépendantes est normale

Tableau récapitulatif des à Connaître sur les lois Continues

Loi	valeurs P	Densités	Espérance	Variance
Loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$	$[a,b]$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$[a, +\infty[$	$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Loi Normale $N(0,1)$	$\mathbb{R}$	$\forall x \in \mathbb{R}$ $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$	0	1
Loi Normale $N(m,\sigma)$ $m \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\forall x \in \mathbb{R}$ $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	m	σ^2

IV - Lois dérivées de lois normales :

IV - 1 - Loi de Khi-Deux :

Définition :

Si $T_1, T_2, \dots, T_n$ sont des v.a. de loi $N(0,1)$ indépendantes, alors la v.a : $X_n = T_1^2 + T_2^2 + \dots + T_n^2$ suit la loi du Khi-Deux de paramètre n ce que l'on note $X_n = \chi^2_n$

Le paramètre n est appelé le nombre de degrés de liberté de la loi de χ^2

on montre que $E(X_n) = n$, $V(X_n) = 2n$

La variable X_n ne prend que des valeurs positives ou nulles, sa loi est tabulée

• Propriétés :

La somme de 2 v.a. indépendantes qui suivent la loi de χ^2 respectivement à n_1 et n_2 degrés de liberté suit la loi $\chi^2_{n_1+n_2}$

Si n est assez grand ($n \geq 100$) la loi χ^2_n peut être approchée par la loi normale $N(n, \sqrt{2n})$

La proposition suivante, valable dès que $n \geq 30$, améliore cette approximation.

• Proposition :

Soit Z_n une v.a de loi χ^2_n, lorsque $n \to \infty$, la suite des v.a. $\sqrt{2Z_n} - \sqrt{2n-1}$ tend en loi vers la loi normale $N(0,1)$

IV - 2 - Loi de Student :

• Définition :

Soient U une v.a. de loi $N(0,1)$ et X une v.a indépendante de U de la loi χ^2_n alors la variable $T = \frac{U}{\sqrt{X/n}}$ suit une loi de Student à n degrés de liberté.

Remarque :

(1) La loi de T est symétrique, on a donc $E(T) = 0$ et si F désigne sa fonction de répartition, on a : $F(-t) = 1 - F(t)$ $(t \in \mathbb{R})$

(2) Lorsque $n \geq 50$ on peut approcher la loi de T par une loi normale $N(0,1)$